**Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки"**

 **Математика. Финальный тур 2021-22 уч.г.** *Время выполнения – 180 минут.*

### **Общие критерии оценивания**

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

|  |  |
| --- | --- |
| **Символы-Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
|   **20** | Полное верное решение |
| +**.** **16** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
|  **12** | Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
|  **10** | Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка. |
|  **8** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| **.**  **4** | Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения. |
|  **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 **0** | Решение отсутствует (участник не приступал) |

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ  будет соответствовать 13 баллам.

**7 класс**

**7.1.** Натуральное число *n* умножили на сумму цифр числа 3*n* и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите *n*.

**Ответ**: 337. **Решение.** Пусть *s*(*N*) обозначает сумму цифр числа *N.* Тогда условие задачи запишется в виде , т.е. =1011. Значит, , поэтому  не более, чем четырехзначное число, и . Таким образом, *s*(3*n*) не может равняться 337, а должно равняться либо 3 либо 1. Но очевидно, что равенство *s*(3*n*) = 1 приводит к противоречию (в этом случае 3*n* было бы степенью десятки). Значит *s*(3*n*) = 3, *n* = 337. Проверка подтверждает такое решение, т.к. 3*n* = 1011.

**7.2.** Пусть *a* – количество шестизначных чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 17, и *b* – количество шестизначных чисел, делящихся на 17, но не делящихся на 13.

Найдите *a – b*.

**Ответ**: 16290. **Решение.** Пусть *с* — количество шестизначных чисел, делящихся одновременно на 13 и 17. Тогда *а + с* — это количество всех шестизначных чисел, делящихся на 13, и поэтому  ( [*х*] означает целую часть числа *х*). Аналогично,

 Таким образом, *a* – *b* = (*a* + *c*) – (*b* + *c*) = = 16290.

**7.3.** На стороне *ВС* треугольника *АВС* отмечена точка *М* такая, что *АВ* = *ВМ* и *АМ* = *МС*. Известно, что угол *В* в пять раз больше угла *С*. Найдите углы треугольника.

**Ответ.** 60°, =100°, = 20°. **Решение.** Треугольники *ABM* и *AMC* равнобедренные, поэтому углы при их основаниях равны. Обозначим эти углы *x* и *y* соответственно. Тогда по свойству внешнего угла *AMB* для треугольника *AMC* имеем *x =* 2*y*. Отсюда сумма углов *A* и *C* равна *x* + *y* + *y =* 4*y* = 180° –. По условию  = 5*y* и поэтому 9*y* = 180°, значит *y* = 20°. Тогда 60°, 100°.

**7.4.** Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

**Ответ:** 984321. **Решение.** Очевидно, среди цифр искомого числа  нет нуля. Произведение всех цифр от 1 до 9 равно . Поэтому  не может содержать ни цифру 5, ни цифру 7 (иначе произведение цифр числа  должно было бы делиться на  или ). Значит,  содержит не более семи оставшихся цифр, и  делится на произведение цифр числа . Поскольку  не является кубом натурального числа,  не может содержать все эти семь цифр.Если мы удалим цифру , то оставшиеся шесть цифр дадут в произведении . Удаление вместо шестерки любой другой цифры, очевидно, не дает произведения, равного кубу натурального числа. А удаление нескольких цифр приводит к числу, состоящему из пяти или менее цифр. Значит,  состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 8, 9, и требование максимальности приводит к результату: .

**7.5.** Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого прямоугольника размера: **а**) 5×10 клеток; **б**) 5×9 клеток?

**Ответ**: **a**) 16; **б**) 15. **Решение.** **а)** Очевидно, что можно вырезать не более 16 уголков, так как в противном случае прямоугольник должен содержать не менее 17∙3=51>50 клеток. На левом рисунке показан пример разрезания одного квадрата 5×5 на 8 уголков и одну (заштрихованную) клетку. Соседний квадрат 5×5 разрезается точно так же. **б)** На правом рисунке см. пример разрезания на 15 уголков (каждый прямоугольник 2×3 здесь очевидно разрезается на два уголка).

**8 класс**

**8.1.** Натуральное число *n* умножили на сумму цифр числа 3*n* и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите *n*.

**Ответ**: 337. **Решение.** См. задачу 7.1

**8.2.** На стороне *ВС* треугольника *АВС* отмечена точка *М* такая, что *АВ* = *ВМ* и *АМ* = *МС*. Известно, что угол *В* в пять раз больше угла *С*. Найдите углы треугольника.

**Ответ**: 60°, =100°, = 20°. **Решение** . См. задачу 7.3

**8.3.** Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

**Ответ:** 984321. **Решение.** См. задачу 7.4

**8.4.** В клетчатом квадрате *n* × *n* каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем *n* всегда (т.е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

**Ответ:** *n* = 5. **Решение.** Докажем, что при *n* = 5 (а значит, и при n >5) такой прямоугольник найдется. Рассмотрим нижнюю строку таблицы. В ней есть по меньшей мере 3 клетки одного цвета. Пусть для определённости это будут белые клетки. Тогда рассмотрим три столбца с этими клетками в основании, т.е. мы рассмотрим меньшую таблицу размера 5х3, нижняя строка которой состоит из трех белых клеток. Если в какой-нибудь из четырех оставшихся строк этой меньшей таблицы есть две белые клетки, то искомый «белый» прямоугольник образован их центрами и центрами соответствующих клеток нижней строки. Пусть теперь в каждой из этих четырех строк есть по меньшей мере две черные клетки. Тогда среди этих четырех строк будет хотя бы две строки с одинаковым расположением черных клеток, т.к. есть только 3 различных расположения двух черных (обозначим ч) клеток, а именно: (чч?), (ч?ч) и (?чч)), а значит их центры образуют «черный» прямоугольник. Пример раскраски квадрата 4×4, для которой нет искомого прямоугольника, см. на рисунке (легко убедиться, что для этого примера нет «одноцветных» прямоугольников даже со сторонами, не параллельными линиям сетки).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**8.5.** Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке. **а)** Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек? **б)** Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

**Ответ**: **a**) 9. **Решение. а)** Заметим, что у трёх подряд стоящих девочек есть хотя бы один платочек: иначе у стоящей посередине не было бы соседки в платочке. Зафиксируем в хороводе одну девочку в платочке, скажем, Таню, и будем рассматривать последовательно по часовой стрелке по три девочки после Тани. Всего таких троек 8, и в каждой из них есть хотя бы один платочек. Таким образом, всего платочков не меньше 1+8=9, и оценка получена. Теперь построим пример правильного хоровода с 9 платочками: для этого можно надеть платочек Тане, а в каждой из указанных троек – девочке, стоящей посередине. **б)** Пусть в хороводе больше 12 платочков. Зафиксируем теперь девочку без платочка, скажем, Олю (если у всех 25 девочек надеты платочки, то ситуация очевидна: любая может снять свой платочек). Оставшиеся 24 девочки разбиваются на шесть четвёрок, считая после Оли по часовой стрелке. Тогда в какой-то из четвёрок окажется не менее трёх платочков (по принципу Дирихле или рассуждая от противного: иначе всего платочков было бы не более ). Поэтому из трёх девочек в платочках в этой четвёрке средняя девочка, очевидно, может снять свой платочек и хоровод останется правильным.

**9 класс**

**9.1.** При каких значениях числа *а* три графика *у = ах + а*, *у = х* и *у* = 2 – 2*ах* пересекаются в одной точке?

**Ответ:** при *а =* 1/2 и*а = –*2.**Решение.** Задача сводится к решению данных трёх уравнений с тремя неизвестными *х*, *у* и *а*.Подставим выражение для *у* из второго уравнения *у = х*  в первое и третье уравнение: . Выразим из первого уравнения системы и подставим во второе. В результате получим квадратное уравнение *х*(*x +* 1) *=* 2(*x +* 1)– 2*x*2⇔3*x*2– *x* – 2 = 0*.* Отсюда *х*1,2 = (1 ± 5)/6*.* Имеем два решения *x*1 = 1 и *x*2 = –2/3. Соответствующие значения *а* равны *а*1 *=* 1/2 и *а*2 *=* – 2. (*Замечание:* можно не делать проверку, если заметить, что при решении мы домножили уравнение на (*x* + 1)*,* но среди корней нет *x =* –1).

**9.2.** В треугольнике *АВС* медиана *ВM* вдвое меньше биссектрисы *АN*. Известно, что угол *CВM* в три раза больше угла *СAN*. Найдите углы треугольника *АВС*.

**Ответ: ∠***A* = **∠***C* = 36°, **∠***B* = 108°. **Решение.** Пусть *α* – угол между биссектрисой *AN* и сторонами *АВ* и *АС*. Проведем через точку *М* прямую, параллельную биссектрисе *AN* и пусть *К* – точка пересечения этой прямой со стороной *ВС*. Поскольку *М* – середина *АС*, то в треугольнике *ANC* отрезок *МК* – это средняя линия. Следовательно, (по условию задачи). Таким образом, треугольник *ВМК* равнобедренный и значит, **∠***МКВ =* **∠***МВК =* 3*α* (как углы при основании). Угол *МКВ* – внешний для треугольника *МКС* , поэтому **∠***МКВ =* **∠***КМС +***∠***КСМ,* т.е.3*α = α* +**∠***КСM.* Отсюда **∠***КСМ =* 2*α =***∠***ВАС.* Итак, мы получаем, что треугольник *АВС* равнобедренный и тогда медиана *ВМ* является высотой, т.е. треугольник *ВМС –* прямоугольный, а сумма его острых углов 3*α +* 2*α =* 90° **⇔** *α =* 18°. В результате получаем: **∠***A* = **∠***C* = 2*α =* 36°, **∠***B* = 2·3*α* = 108°.

**9.3.** Для натурального числа *n* обозначим через *T*(*n*) произведение всех его натуральных делителей (включая *n*). **а)** Вычислите *T*(2022). **б**) Существует ли простое число *р* и натуральное число *n* такие, что *T*(*n*) = *p*2022?

**Ответ:** **а**) ; **б**) не существует. **Решение.** **а**) Разложим 2022 на простые множители:  Каждый четный делитель этого числа имеет вид , где показатели ,  принимают два значения 0 или 1. Количество таких упорядоченных пар  равно . Итак, имеется ровно 4 четных делителя, и поэтому в произведение двойка войдет в четвертой степени. Аналогично, остальные простые делители 3 и 337 войдут в произведение в четвёртой степени. Таким образом,  **б**) Поскольку *p* – простое число, а *T*(*n*) есть степень числа *p*, то *n* не имеет простых делителей, отличных от *p.* Пусть для некоторого натурального числа *y* . Тогда Отсюда . Таким образом, требуется решить в натуральных числах квадратное уравнение Дискриминант полученного квдратного уравнения равен 16177, это число не является точным квадратом (т.к. оканчивается на семёрку). Значит, искомого *n* не существует.

**9.4.** В клетчатом квадрате *n* × *n* каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем *n* всегда (т.е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

**Ответ:** *n* = 5. **Решение.** См. задачу 8.4.

**9.5.** Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке. **а)** Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек? **б)** Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

**Ответ**: **a**) 9. **Решение.** См. задачу 8.5.

**10 класс**

**10.1.** При каких значениях числа *а* три графика *у* = *ах* + *а*, *у* = *х* и *у* = 2 – 2*ах* пересекаются в одной точке?

**Ответ:** при *а =* 1/2 и*а = –*2.**Решение.** См. задачу **9.**1.

**10.2.** В треугольнике *АВС* медиана *ВM* вдвое меньше биссектрисы *АN*. Известно, что угол *CВM* в три раза больше угла *СAN*. Найдите углы треугольника *АВС*.

**Ответ: ∠***A* = **∠***C* = 36°, **∠***B* = 108°. **Решение.** См. задачу 9.2.

**10.3.** Докажите неравенство .

**Решение**. Сначала исследуем ОДЗ переменных. Поскольку *х*3 + *х* ≥ 0 ⇔ *х*(*х*2 + 1) ≥ 0, то *х* ≥ 0. Аналогично, *у* ≥ 0. Таким образом, для неотрицательных *x, y* обе части неравенства имеют смысл и неотрицательны. Поэтому возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному неравенству, которое, (после сокращения) запишется так: . После возведения в квадрат и уничтожения подобных членов оно примет вид:

*х*4 + *у*4 – *ху*3 – *х*3*у* ≥ 0 ⇔  *х*3(*х* – *у*) – *у*3(*х* – *у*) ≥ 0 ⇔ (*х* – *у*)(*х*3 – *у*3) ≥ 0 ⇔ ⇔ (*х* – *у*)2(*х*2 + *ху* + *у*2) ≥ 0. Первый множитель (*х* – *у*)2 ≥ 0 при всех *x, y.* Второй множитель (*х*2 + *ху* + *у*2) ≥ 0 тоже всегда неотрицателен, т.к. *х* ≥ 0, *у* ≥ 0 (или в силу отрицательности дискриминанта *D*(*у*) = *у*2 – 4*у*2 = –3*у*2 этого квадратного трехчлена переменной *x* со старшим коэффициент 1).

**10.4.** Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел *x*, *y*, *z*, удовлетворяющих соотношению *x*2 + *y*2 = *z*2022.

**Решение**. Возьмем пифагорову тройку, например, (3; 4; 5), и будем рассматривать соотношения (3*t*)2 + (4*t*)2 = (5*t*)2 для различных натуральных *t*. Если положить , то взяв число *z*, делящееся на 5, т.е. *z* = 5*n* для натурального *n* , получим . Таким образом, при любом натуральном *n* числа вида *x* = 3*t*, *y* = 4*t*, где , и *z* = 5*n* удовлетворяют исходному уравнению.

****10.5.** На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.

**Решение.** Пусть *ABCD* — данный прямоугольник. Без ограничения общности можно считать, что *A = О* – начало координат: иначе сместим начало координат в точку *А*, а в конце сделаем сдвиг на целочисленный вектор . Обозначим векторы   где *p, q, m, n* – целые числа. Поскольку  и  взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно 0, т.е. *pm + qn =* 0 (этот факт также следует из соотношения для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых *ОB* и *ОD*). Рассмотрим сначала случай, когда *p* и *q* не взаимно просты. Тогда *p = p*1*k*, *q = q*1*k, k =* НОД(*p, q*) *>* 1. В этом случае рассмотрим на стороне *ОD* промежуточные точки *D*1, *D*2, ..., *Dk–*1, где  *i* = 1, 2, …, *k* – 1. Проведём через точки *Di* прямые, параллельные стороне *ОB*. Они пересекут сторону *ВС* в точках , где  Таким образом, точки *Di* и  имеют целочисленные координаты и тем самым, прямые  (*i* = 1, 2, ..., *k –* 1) разбивают прямоугольник *ОBCD* на *k* прямоугольников с целочисленными вершинами. Назовем это разбиением первого типа. Аналогично, если *m* и *n* не взаимно просты, то прямыми, параллельными стороне *ОD*, разобьем *ОBCD* на меньшие прямоугольники с целочисленными вершинами. Назовем это разбиением второго типа; прямые этого разбиения проходят через промежуточные точки *Bj* на стороне *ОB,* где *j* = 1, 2, ..., *l –* 1, а *l* – наибольший общий делитель *m* и *n,*  (*m = m*1*l, n = n*1*l*), . Заметим, что в случае, когда одновременно *k >* 1 и *l* *>* 1, прямые первого и второго разбиений разбивают прямоугольник *ОBCD* на  равных прямоугольников с вершинами в точках *Mij*, где  *i* = 1, 2, …, *k*,  *j* = 1, 2, ..., *l*, т.е. все вершины имеют целочисленные координаты. Итак, приходим к случаю, когда координаты каждого из векторов ,  взаимно просты. Но тогда из равенства *pm = – qn* получим, что *p =* ±*n*, *q =* ±*m* (действительно, из этого равенства следует, что *p* делится на *n* и, в то же время, *n* делится на *p*, значит, *p =* ±*n*; аналогично, *q =* ±*m,* с учетом знака в данном равенстве). В этом случае стороны прямоугольника *ОBCD* равны: , и наш прямоугольник – квадрат.

**11 класс**

**11.1.** Решите неравенство *f* ( *f* (*x*)) < ( *f* (*x*))2, где *f* (*x*) = 2*x*2 – 1.

**Ответ**: . **Решение**. Пусть *.* Тогда .

**11.2.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции *y* =(arcsin *x*)⋅(arccos *x*).

**Ответ:** наибольшее значение =** (при **), наименьшее значение =** (при**). **Решение.** Значенияarcsin *x* и arccos *x* при любом **, как известно, связаны соотношением arcsin *x* + arccos *x* =*.* Таким образом, требуется исследовать функцию ** где ** Данная квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом принимает наибольшее значение в точке **(вершине параболы), равное **. Наименьшее значение принимается на границе промежутка **, а именно, в точке ** и оно равно ** (на другом конце промежутка, при *,* значение равно нулю). Соответствующие значения *x*,в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения функции, таковы: ** и *.*

**11.3.** Числа *х*, *у* удовлетворяют уравнению **.** Можно ли утверждать, что *х* = *у*?

**Ответ**: можно. **Решение**. См. решение задачи 10.3: всюду вместо неравенств нужно рассматривать равенства, и тогда исходное уравнение приводится к уравнению (*х* – *у*)2(*х*2 + *ху* + *у*2) = 0. Первый множитель обращается в 0 (только) при *х* = *у,* а второй – при *х* = *у =* 0.

**11.4.** Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел *x*, *y*, *z*, удовлетворяющих соотношению *x*2 + *y*2 = *z*2022.

**Решение**. См. задачу 10.4.

**11.5.** На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.

**Решение**. См. задачу 10.5.