**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»**

**Математика. Финальный тур. 2020-2021 учебный год**

**14 февраля 2021 г.**

**7 класс**

**7.1**. В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное число на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа).

**Ответ:**1496 или 2996**. Решение**. Пусть  – первая цифра,  – трехзначное число, полученное после зачеркивания первой цифры. Тогда , т.е. 500*х*= *y*+ 4. Отсюда, учитывая неравенства 0 < *y* < 1000, получаем, что *х* равен либо 1, либо 2. Тогда, соответственно, или.

**7.2**.В четырехугольнике *ABCD*, у которого *AB* = *CD*, проведена диагональ *АС*. Докажите, что если угол *АСВ* тупой, тоугол *ADC* острый.

**Решение.** Предположим, от противного, что угол *D* не острый. Тогда в  *ACD* имеем *AC* > *CD*. Но в  *AВC* против тупого угла *ACВ*  лежит бóльшая сторона:*АВ* > *AC*. Таким образом, . Получили противоречие с условием .

**7.3**. У Коли семь старинных монет: четыре одинаковых дублона и три одинаковых кроны. Точный вес монет он забыл, но помнит, что дублон весит 5 или 6 грамм, а крона – 7 или 8 грамм. Сможет ли он узнать точный вес монет при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

**Ответ:** сможет. **Решение.** Первое взвешивание: на левую чашу весов положим все четыре дублона, а на правую – все три кроны. Таким образом, вес монет на левой чаше 20 или 24 грамма, а на правой – 21 или 24 грамма. Если весы в равновесии, то вес монет однозначно определяется: дублон весит 6 грамм, а крона – 8 грамм. Если левая чаша перевесила, то это означает, что вес монет на ней 24 грамма, в то время, как на правой – 21 грамм, т.е. тоже однозначно определен вес монет: дублон весит 6 грамм, а крона – 7 грамм. Если же перевесила правая чаша, то однозначно определен только вес дублона (он весит 5 грамм), а вес кроны пока не известен, и вторым взвешиванием мы его узнаем. Для этого на левую чашу положим три дублона, а на правую – две кроны. Тогда вес на левой чаше 15 грамм, а на правой – 14 или 16 грамм. Поэтому в случае, когда перевесит левая чаша, вес кроны 7 грамм, а в противном случае – 8 грамм.

**7.4.** Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1см и площадью 2021 см двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см.

**Решение.**  Простые делители числа 2021 – это 43 и 47, причем 2021=. Поэтому целые стороны *а* и *b* исходного прямоугольника могут быть либо 1) *а* = 2021, *b* = 1, либо 2) *а* = 47, *b* = 43. Но, очевидно, случай 1) *а* = 2021, *b* = 1 невозможен, т.к. такой прямоугольник невозможно разрезать на клетчатые прямоугольники. Во втором случае самая большая из четырех частей будет иметь площадь не меньше 24⋅22 = 528.

**7.5.**  Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так,что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

**Ответ**: не могло. **Решение.** Предположим, от противного, что расставить числа можно, и рассмотрим три самых больших простых числа, меньших 25, а именно 17, 19 и 23. Пусть *п* – любое из этих трех чисел. Поскольку  и , то соседними с *п* двумя числами на окружности могут быть только  и единица. Таким образом, единица должна быть соседом сразу трех чисел, что, очевидно, невозможно.

**8 класс**

**8.1**.В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное числа на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа).

**Ответ:**1496 или 2996**.Решение**. См. задачу 7.1.

**8.2**. В треугольнике *ABC* угол *A* наибольший. Точки *M* и *N* симметричны вершине *A* относительно биссектрис углов *B* и *C* соответственно. Найдите ∠*A*, если ∠*MAN* = 50°.

**Ответ:** 80°. **Решение**. Пусть . Тогда ,  (т.к. треугольники *АМВ* и *ANC* равнобедренные). Поэтому   
. Из условия задачи , и значит,  = 80°.

**8.3**. Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1см и площадью 2021 см двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см.

**Решение.**  См. задачу 7.4.

**8.4**.  Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

**Ответ**: не могло. **Решение.** См. задачу 7.5.

**8.5**.25 учеников класса, среди которых*n* мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если **а**) *n*=10; **б**) *n*=11?

**Ответ:а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.а**) Построим пример. Пронумеруем места за столом по часовой стрелке: 1,2, …, 25. Если 10 мальчиков сидят на местах 1, 2, 3, 4, 5 (первая группа) и 11, 12, 13, 14, 15 (вторая группа), то *по часовой стрелке* между мальчиками одной и той же группы сидит не больше трёх человек, между мальчиками первой и второй группы – не меньше пяти человек, а между мальчиками второй и первой группы – не меньше десяти человек. **б**) Будем считать, что все ученики сидят в вершинах правильного 25-угольника, обозначим их,,…,. Они представляют собой вершины пяти правильных пятиугольников: первый из них – пятиугольник, а каждый следующий получается сдвигом на угол 36025 по часовой стрелке (т.е. номера вершин в каждом пятиугольнике дают одинаковые остатки при делении на 5). Поскольку мальчиков 11, а пятиугольников 5, то хотя бы три мальчика будут «вершинами» одного из пятиугольников. Но тогда в этом пятиугольнике из данных трёх вершин хотя бы две будут соседними. А в 25-угольнике эти две вершины и окажутся искомой парой, т.к. между ними (по часовой стрелке) ровно 4 вершины 25-угольника.

**9 класс**

**9.1**. Существуют ли такие нецелые числа *x*, *y*, что оба числа 5*x* + 7*y* и 7*x* + 10*y* целые?

**Ответ:** Не существуют. **Решение.** Пусть 5*x* + 7*y* = *m*, 7*x* + 10*y* = *n*, где *m* и *n* – целые. Решим эту систему уравнений, домножив первое уравнение на 10, а второе – на 7. Вычитая полученные уравнения, будем иметь *x* = 10*m* – 7*n*, т.е. *x* - целое число.

**9.2**. В треугольнике *ABC* угол *A* наибольший. Точки *M* и *N* симметричны вершине *A* относительно биссектрис углов *B* и *C* соответственно. Найдите ∠*A*, если ∠*MAN* = 50°.

**Ответ:** 80°. **Решение**. См. задачу 8.2

* 1. Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

**Ответ: 4. Решение.**Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника равна *х*, один из катетов – *у*, а другой – 2021. Тогда по теореме Пифагора*х*2 – *у*2 = 20212. , т.е. (*х* – *у*)⋅(*х + у*) =  20212. Учитывая, что *х* > *y*, имеем: *х + у* > *х* – *у* > 0. Так как разложение 2021 на простые множители имеет вид 2021 = 43⋅47, то разложение 20212 на простые множители есть 20212 = 432⋅472 и поэтому 20212можно представить в виде произведения двух натуральных чисел пятью способами:

20212 = 1⋅(432⋅472) = 43⋅(43⋅472) = 47⋅(432⋅47) = 432⋅472 = (43⋅47)⋅(43⋅47).

Поскольку в произведении (*х* – *у*)⋅(*х + у*) множители различны и второй множитель больше первого, то имеем четыре системы из двух уравнений:



При решении каждой из этих систем получаем, очевидно,натуральные*х* , *y*(что следует из нечетности правых частей). Следовательно, существует четыре прямоугольных треугольника с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021.

**9.4**. 25 учеников класса, среди которых *n* мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если **а**) *n*=10; **б**) *n*=11?

**Ответ:а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.** См. задачу 8.5.

**9.5.**Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: **а**) все одинаковые числа? **б**) все числа, равные 200?

**Ответ:а)** можно, **б)** нельзя. **Решение. а)** Покажем, как проделать три операции с числами , чтобы в результате нескольких троек операций все числа стали равными. Пусть – наименьшее, а – наибольшее из чисел . Сосчитаем сумму



Если , то все числа одинаковые и . Если же , то  и мы проделаем следующие три операции, которые  уменьшат на единицу, а значит через несколько таких операций сделают  равным нулю. Эти три операции заключаются в прибавлении по 1 к трем тройкам чисел; если, для определенности,  то эти тройки таковы: . В результате этих трех операций все числа, кроме  станут больше на 1 и  станет больше на 1, т.е.  уменьшится на 1. **б)** Покажем, что это невозможно. В результате каждой операции сумма чисел увеличивается на 3, значит за  операций она увеличится на  Вначале эта сумма равнялась , т.е. давала остаток 1 при делении на 3. В конце сумма должна равняться 2000, т.е. остаток при делении на 3 должен стать равным 2, что невозможно.

**10 класс**

**10.1**. Решите уравнение )=).

**Ответ:**,. **Решение**. Умножим обе части уравнения на , получим = Таким образом,*х*1 = 0, *х*2 = –1.

**10.2.**Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

**Ответ: 4. Решение.** См. задачу 9.3.

**10.3.** На стороне *BC* треугольника *АВС* взята точка  такая, что . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника , лежит на прямой, проходящей через точкуи перпендикулярной .

**Решение.** На прямой, проходящей через точку *B* и перпендикулярной прямой *АМ*, возьмем такую точку *N*, что *AN=BN* (она лежит на серединном перпендикуляре к *АВ*). Тогда

*A*

*В*

*C*

*M*

*N*

*NAB*=*ABN*= *MAB*, поэтому

*ANB*= 2*NAB =**ABN*) = 2*MAB*= 2*ACB.*Отсюда следует, что точка *С* лежит на окружности, проходящей через *А* и *В*, с центром в точке *N*: действительно, для этой окружности *ANB* – центральный, а *ACB* – вписанный (если бы точка *С* лежала вне этой окружности, то *ACB* был бы меньше половины центрального, а если бы точка С была внутри окружности, то *ACB* был бы больше половины центрального).

**10.4**. Последовательность целых чисел задается следующим образом: ,=100. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

**Решение.** Пусть и – два произвольных члена последовательности (*m*> 0). Докажем, что можно представить в виде = +1, где  – многочлен с целыми коэффициентами. Мы докажем этот факт по индукции. Для *m* = 1 имеем, т.е. . Для *m* = 2 получим, т.е.. Пусть *ап+k* = *ап*⋅ + 1 при *m* = *k*, тогда при *m* = *k* + 1 будем иметь

*ап+k+*1 = *ап+k*⋅(*ап+k* – 1) + 1 = (*ап*⋅ + 1)⋅*ап*⋅ + 1, и значит, многочлен  имеет вид

 =(*ап*⋅ + 1) и поэтому его коэффициенты целые. Найдем наибольший общий делитель *ап*и *ап+m* =  + 1. Из последнего соотношения следует, что если НОД(*ап*, *ап+m*) = *d*,то и 1 делится на*d*и следовательно, *d* = 1, то есть *ап* и *ап+m* взаимно просты.

**10.5.** Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: **а**) все одинаковые числа? **б**) все числа, равные 200?

**Ответ:а)** можно, **б)** нельзя. **Решение.** См. задачу 9.5.

**11 класс**

**11.1**.Решите уравнение )=).

**Ответ:**, . Решение. См. задачу 10.1.

**11.2.**Дан равнобедренный треугольник *АВС* с основанием *АС*. Пусть *М*– точка пересечения медиан. Докажите, что .

**Решение.** Пусть *ВК* – медиана равнобедренного треугольника *АВС*, проведенная к основанию *АС*, тогда *ВК*⊥*АС* по свойству равнобедренного треугольника. По свойству точки пересечения медиан,*ВК*:*МК*= 3:1. Обозначим, ∠*МАК* = *α*, ∠*ВАК* = *β*, Тогда неравенство  равносильно неравенству *β* < 3*α*. Последнее неравенство очевидно в случае, когда*α* ≥, т.к.  *β* < Пусть теперь *α* <. Из прямоугольных треугольников *АВК* и *АМК*имеем: tg*β =*, tg*α =*, значит, tg*β =* 3tg*α*. Так как углы *β* и 3*α* лежат в интервале, то неравенство*β* < 3*α*равносильно неравенствуtg*β* < tg3*α*, т.е. 3tg*α* < tg3*α*. Рассмотрим разность

*А*

*В*

*С*

*М*

*К*

tg3*α* – 3tg*α* = (tg3*α* – tg*α*) – 2tg*α* = = .

Так как , то  и , и значит, , следовательно, tg3*α* – 3tg*α* >0.

**11.3**Последовательность целых чисел задается следующим образом: , =100. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

**Решение.** См. задачу 10.4.

**11.4**. У Пети скопилось много кусочков пластилина трех цветов, и он плотно заполнил пластилином полый куб со стороной 5 см, так что в кубе не осталось свободного места. Докажите, что внутри куба найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 7 см друг от друга.

**Решение.** В кубе  рассмотрим 4 вершины . Они являются вершинами правильного тетраэдра со стороной , где *a* = 5 – ребро куба. Поскольку , рассмотрим подобный тетраэдр с коэффициентом подобия k=, т.е. проделаем гомотетию с центром в центре куба и данным коэффициентом подобия. Получим четыре вершины нового тетраэдра внутри куба. Поскольку цветов у пластилина три, хотя бы две вершины этого тетраэдра будут одного цвета.

**11.5**. Существует ли такой многочлен десятой степени, принимающий целые значения при всех   
целых аргументах, у которого старший коэффициент не превосходит по абсолютной   
величине ?

**Ответ**. Существует. **Решение.** Примером такого многочлена, является . Покажем, что этот многочлен удовлетворяет условию задачи. Егостарший коэффициент равен 1/(10!). Проверим, что 1/(10!)< 10–6, т.е. 9! > 105. Действительно, 9! = 27⋅34⋅5⋅7 = 25⋅6⋅6⋅5⋅7⋅9 > 25⋅55 =105. Для того, чтобы доказать тот факт, что этот многочлен принимает целочисленные значения при всех целых *х*, заметим, что при всех натуральных  число  есть не что иное, как , т.е. число сочетаний из  по 10 (или 10-й биномиальный коэффициент в биноме Ньютона) и значит, это число натуральное. При неотрицательных целых , очевидно, *Р*(0) = *Р*(1) = … = *Р*(9) = 0, а при отрицательных целых  легко проверить, что и поэтому это тоже целое (даже натуральное) число.